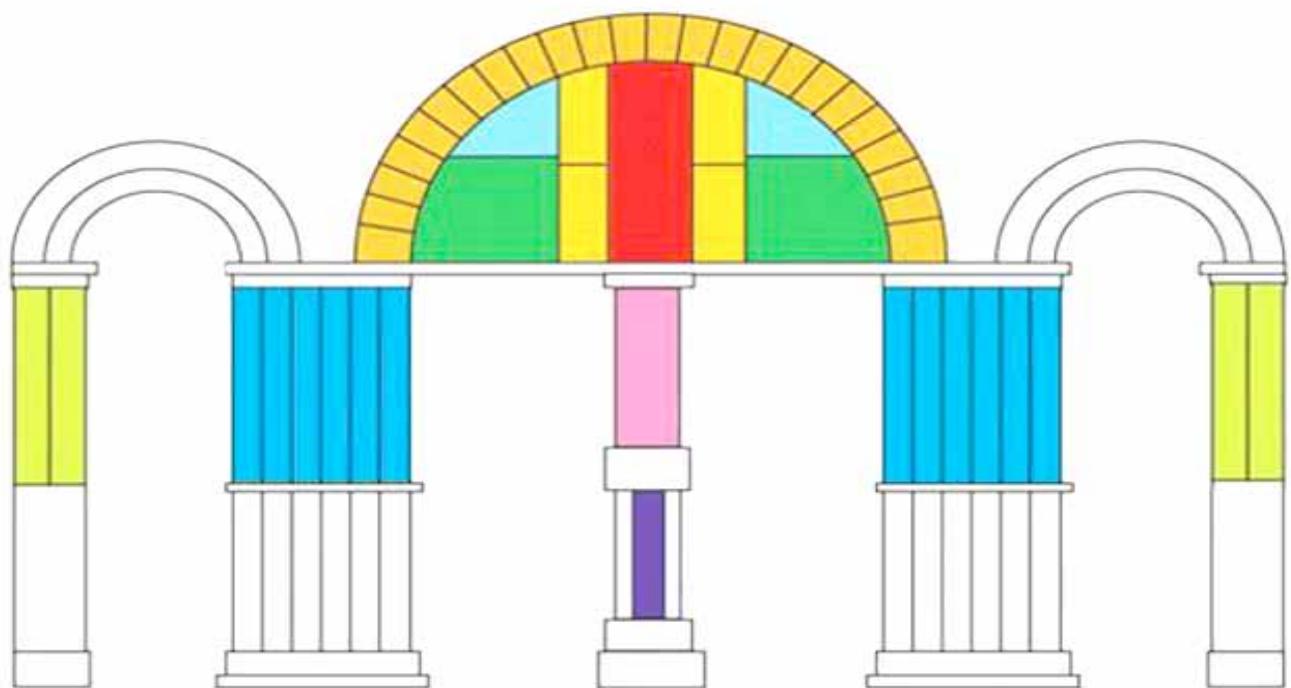


El Pórtico y sus simetrías

Vamos a examinar las simetrías del Pórtico de la Gloria (Pórtico, a partir de ahora) sobre el esqueleto del mismo. Para ello, antes de nada, despojamos al Pórtico de todas las esculturas y demás ornamentos que lo constituyen, quedándonos exclusivamente con el armazón de su alzado. Esto que hacemos es muy habitual en el mundo de las matemáticas: para estudiar una estructura de apariencia compleja, la simplificamos para facilitar su estudio una vez suavizadas sus dificultades y olvidados aquellos detalles más incómodos, es decir, extraemos un esquema básico, un modelo. La simplificación fundamental de este modelo es convertir el Pórtico en una figura geométrica plana.

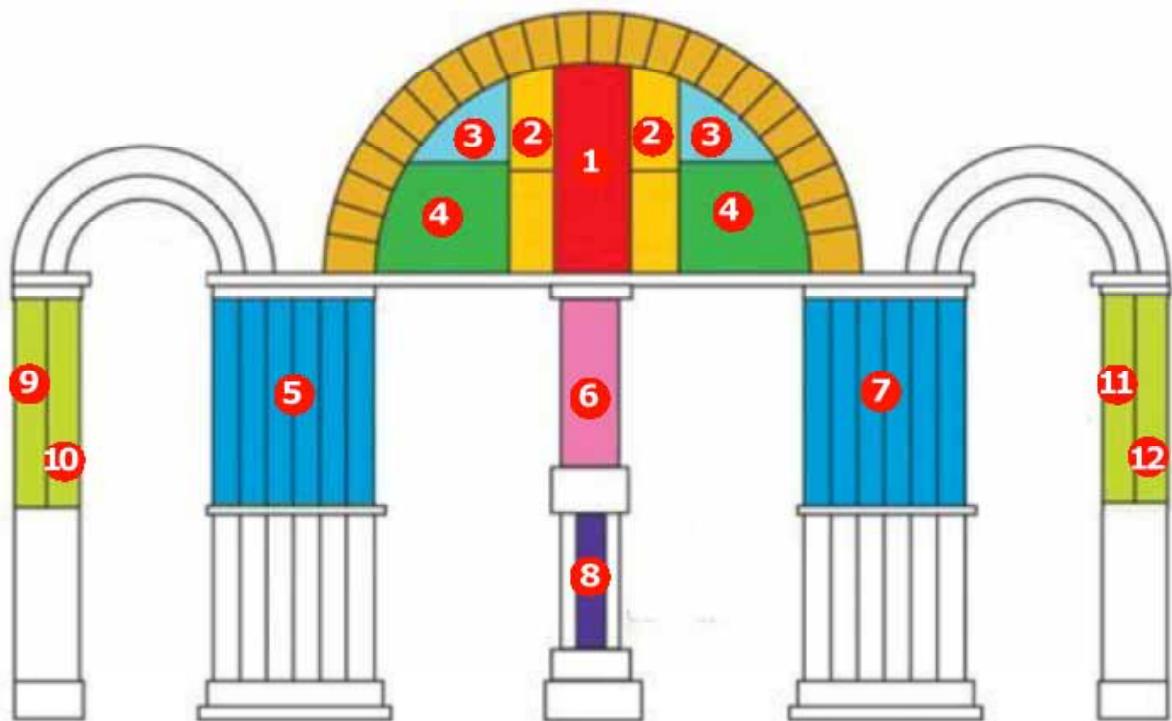


ESQUELETO DEL PÓRTICO DE LA GLORIA

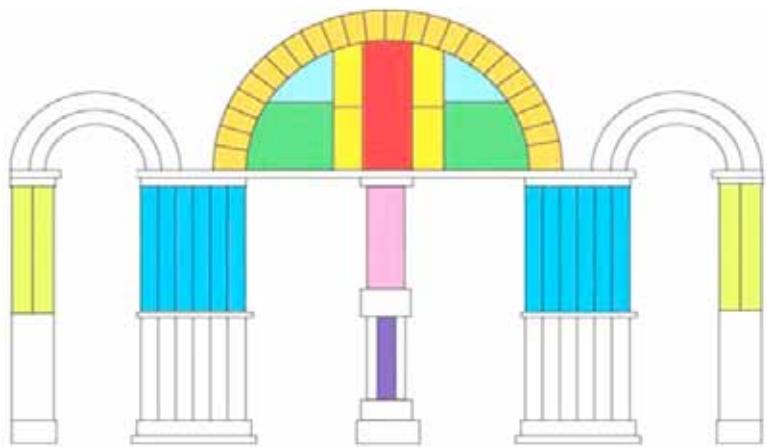
Los distintos colores representan las zonas diferenciadas que el maestro Mateo eligió para distribuir los distintos temas bíblicos que se incluyen el Pórtico.

El Pórtico y sus simetrías

Autor: Luis Puig Mosquera



- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. CRISTO REDENTOR | 7. PILAR DE LOS APÓSTOLES |
| 2. EVANGELISTAS | 8. ÁRBOL DE JESÉ |
| 3. BIENAVENTURADOS EN LA GLORIA | 9. PROFETA ABDÍAS |
| 4. ÁNGELES PORTANDO LOS INSTRUMENTOS DE LA PASIÓN | 10. PROFETA AMÓS |
| 5. PILAR DE LOS PROFETAS | 11. APÓSTOL STO. TOMÁS |
| 6. APÓSTOL SANTIAGO | 12. APÓSTOL SAN BARTOLOMÉ |



En una primera mirada al esqueleto pueden observarse dos aspectos que sobresalen: el primero, la simetría del conjunto; el segundo, las líneas que lo definen, rectas y arcos de circunferencia.

Antes de analizar la primera de las cualidades observadas, su simetría, convendrá decir que un objeto puede presentar distintos tipos de simetrías. Una de ellas es la simetría axial, también llamada simetría bilateral o reflexión, en la que una recta fija constituye el eje de la simetría. Está caracterizada porque cada punto de la figura se corresponde con otro –su simétrico–, de manera que la mediatrix del segmento que los une siempre ha de ser el citado eje de simetría.



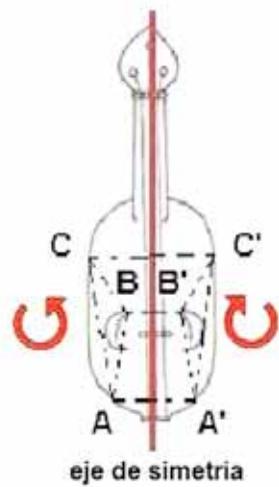
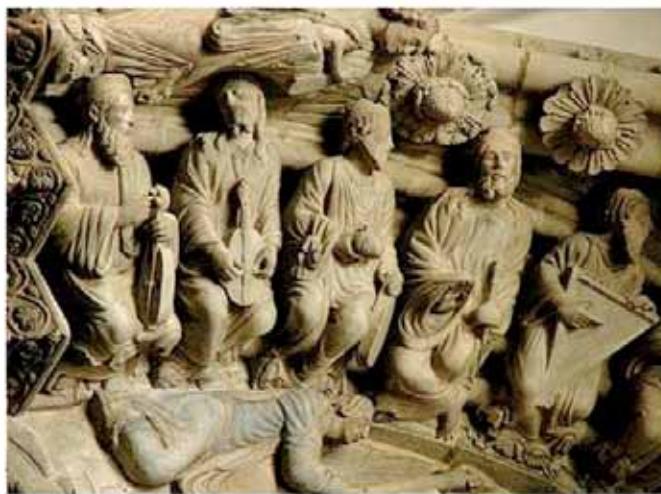
Podemos apreciar la simetría bilateral en el águila, símbolo de san Juan Evangelista, sobre la que escribe en el timpán del Pórtico. También se observa simetría en los rostros, como el del propio Juan, esta vez más joven, de pie sobre el águila sobre las columnas del lado derecho del arco central, zona dedicada al Nuevo Testamento. Si doblásemos una figura simétrica por un eje de simetría, ambas partes se superpondrían de manera que cada punto coincidiría exactamente con su simétrico, A con A', B con B', etc. Un cuadrado tiene seis ejes de simetría por tres de un triángulo equilátero, todos ellos señalados.

La simetría axial aparece con mucha frecuencia en la naturaleza, tanto en las plantas como en los animales, incluidos los seres humanos. Así, por ejemplo, podemos apreciarla en los insectos. En la figura, los puntos A y A' son simétricos respecto al eje y por tanto, a su vez, el eje representa la mediatrix del segmento AA'. Por igual motivo, el eje también es la mediatrix del segmento BB' y de todos los segmentos que resulten de unir cada punto con su simétrico.

La simetría es una idea, por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.

Hermann Weyl

Las simetrías axiales tienen dos características fundamentales. Por un lado, conservan las distancias. Quiere decir esto que la distancia entre dos puntos cualesquiera es la misma que la distancia entre sus respectivos simétricos. En el caso de la libélula de la figura, la distancia entre los puntos A y B ha de ser la misma que entre los puntos A' y B'.



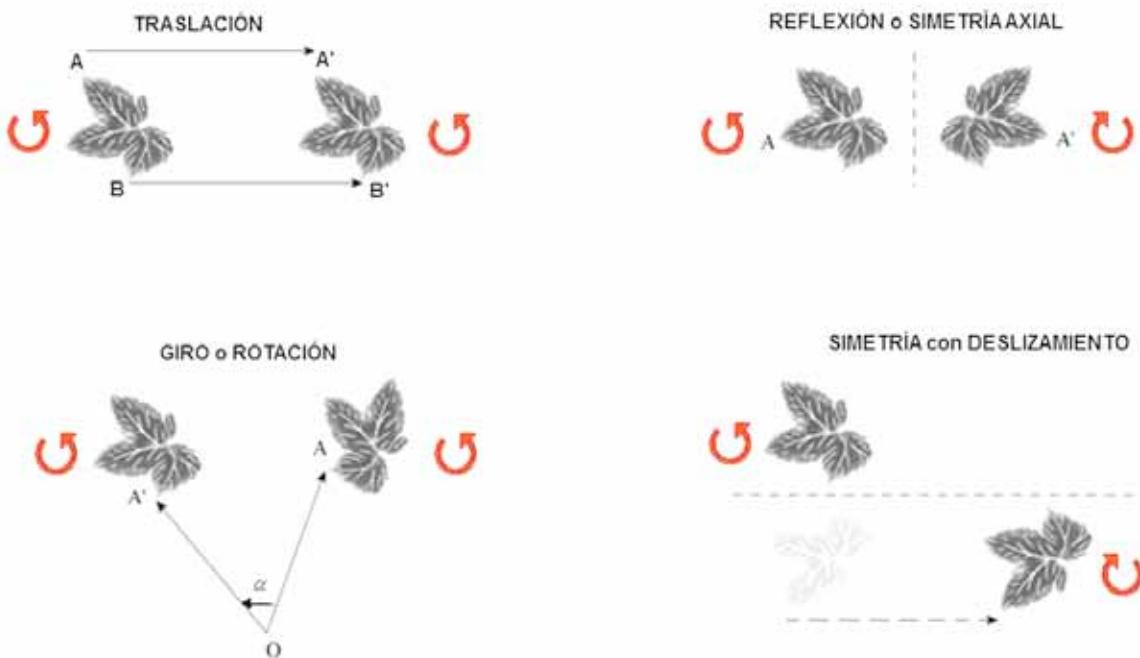
A la izquierda, ubicados en la arquivolta con la que se cierra superiormente el timpán del arco central del Pórtico, pueden verse cinco de los veinticuatro ancianos del Apocalipsis afinando sus instrumentos. El de la izquierda lleva una fídula o viola oval, reproducida y esquematizada a la derecha. Su geometría es un nuevo caso de simetría bilateral. Los triángulos ABC y A'B'C' son simétricos respecto al eje y el sentido de giro en ABC se transforma en el contrario en A'B'C'. Este hecho evidencia que la simetría axial invierte la orientación de las figuras y, por ello, se considera una isometría negativa.

4

La segunda característica es la de invertir la orientación. Esto significa que, mediante una simetría axial, la figura simétrica tiene orientación contraria a la original, como puede observarse en la figura que reproduce uno de los instrumentos.

Desde el punto de vista geométrico, una isometría (*isos* = igual, *metros* = medida) es una transformación que conserva las distancias entre originales y transformados. Puesto que la simetría axial es una isometría, como se aprecia en la figura, la distancia entre A y B coincide con la distancia entre A' y B', de igual manera que la que hay entre A y C es la misma que la distancia entre A' y C'.

Todas las isometrías del plano pueden reducirse a las siguientes transformaciones: traslación, rotación (giro de centro O y ángulo α), reflexión (simetría bilateral o axial) y simetría con deslizamiento. Las dos primeras son positivas, es decir, conservan la orientación, mientras que la reflexión y la simetría con deslizamiento la invierten y, por tanto, son negativas. La simetría con deslizamiento, como se ilustra en la figura siguiente, resulta de la aplicación sucesiva de una simetría axial y una traslación paralela al eje de la propia simetría.



ISOMETRÍAS	Positivas	Negativas
Sin puntos fijos	TRASLACIONES	SIMETRÍAS con DESLIZAMIENTO
Con puntos fijos	GIROS	SIMETRÍAS AXIALES

Isometrías en el plano. Clasificación

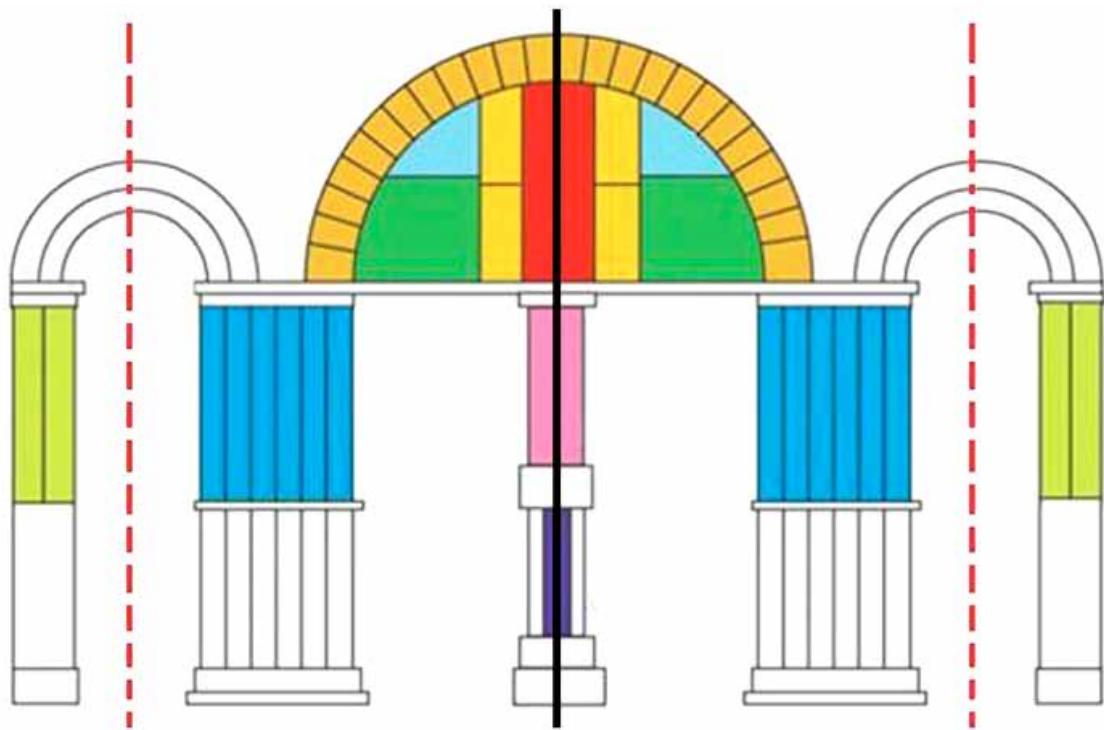
Tanto en las traslaciones como en los giros se mantiene la orientación de las figuras (isometrías positivas). En cambio, en las simetrías axiales y con deslizamiento se invierte la orientación (isometrías negativas).

Son puntos fijos o dobles aquellos que se transforman en sí mismos por la isometría. Las traslaciones no presentan puntos invariantes. Los giros dejan un solo punto invariante: el centro de giro. Por su parte, las simetrías axiales dejan invariantes todos los puntos del eje de la simetría. Las simetrías con deslizamiento no admiten puntos fijos.

5

Un caso excepcional de isometría está representado por la identidad, transformación que hace que cada punto del plano se transforme en sí mismo, es decir, deja cada punto donde está. Puede considerarse un caso particular de una traslación, la de vector nulo, o también un giro de ángulo 0° . La identidad, como las traslaciones o giros, es una isometría positiva, ya que deja invariante cualquier punto del plano.

Después de las consideraciones anteriores, volvamos de nuevo a la estructura del Pórtico y analicemos las simetrías bilaterales básicas que presenta. La más evidente es la que abarca todo su conjunto, aquella cuyo eje es la recta –con trazo continuo en la imagen– que divide la estructura en dos partes simétricas, siguiendo la dirección vertical a través del parteluz.



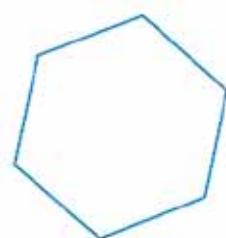
Simetrías axiales en el Pórtico

Pero además de la citada simetría bilateral de todo el conjunto, la estructura presenta también un par de simetrías parciales en los dos arcos laterales del Pórtico. En ambos arcos menores, sendas rectas verticales por el centro de los mismos –con trazos discontinuos en la imagen– representan ejes de simetría para cada uno de los pórticos menores, que dan acceso a las naves laterales de la catedral.

Actividades

1. Fíjate en las siguientes figuras y averigua cuántos ejes de simetría tiene cada una de ellas. Para comprobarlo, con la ayuda de un espejo examina si al colocarlo verticalmente sobre el eje de simetría, vemos la figura al completo.

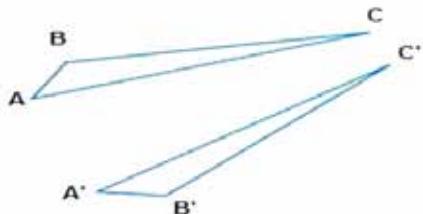
6



2. Escribe tu nombre con letras de imprenta. A una distancia de aproximadamente 1 cm debajo de él, traza una línea horizontal. Trata de construir la imagen simétrica de tu nombre respecto de la línea que trazaste. Comprueba con un espejo si tu dibujo es correcto.

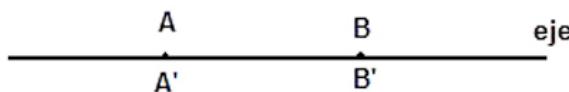
PÓRTICO DE LA GLORIA

PÓRTICO DE LA GLORIA



3. Los puntos A, B y C se trasforman en A', B' y C' mediante una simetría de eje desconocido. Trata de determinar dicho eje. Recuerda que el eje de simetría es la mediatrix de cada punto y su transformado.

4. Se llaman punto invariante o doble en una isometría a aquel que se transforman en sí mismo. En el caso de una simetría axial son puntos invariantes todos los del eje de simetría.



Los puntos A y B son invariantes.

¿Serías capaz de averiguar cuáles son las rectas invariantes en una simetría axial? Fíjate en que los puntos de dichas rectas no tienen por qué ser invariantes.



5. ¿Cuáles de los logotipos de fabricantes de automóviles que aparecen tienen simetría axial?

En cada caso, dibuja los respectivos ejes de simetría que tuviera.



6. Escribe de forma bien clara las cifras numéricas del 0 al 9 y averigua cuáles de ellas presentan simetría axial trazando los correspondientes ejes de las mismas.

Utilizamos todavía el sistema de numeración romana en casos como la representación de los siglos, de manera que escribimos que el Pórtico fue realizado en el siglo XII. Determina también en sus símbolos básicos sus ejes de simetría y en las restantes letras de nuestro alfabeto.

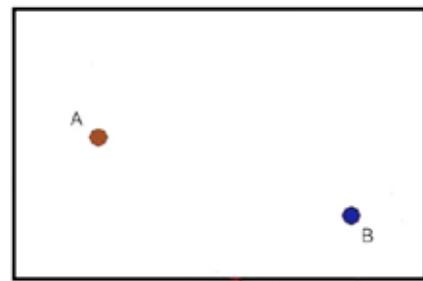
7. Dibuja un ángulo cualquiera y su correspondiente eje de simetría. ¿Cómo se llama esa recta que hace la función de eje de simetría de los ángulos?

8. En la orilla derecha de un río se encuentran un caballo (A) y su cuadra (B). Determina la trayectoria que debe seguir el caballo para ir a la cuadra después de haber bebido en el río, de manera que recorra la menor longitud posible. Haz uso de las simetrías.



Los puntos A y B son puntos dobles (invariantes) porque se transforman en sí mismos.

9. ¿Cuál es el camino mínimo que tiene que recorrer una bola de billar (A) para chocar con la bola (B) después de haber rebotado en dos bandas perpendiculares?

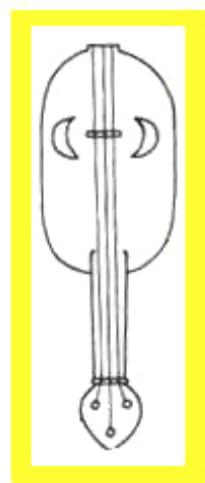
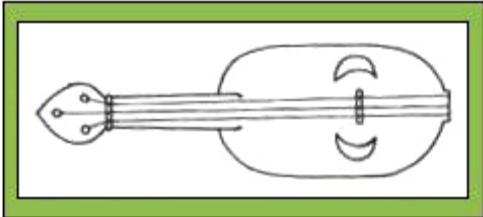
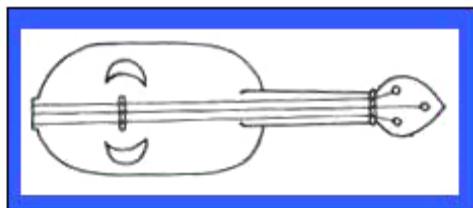
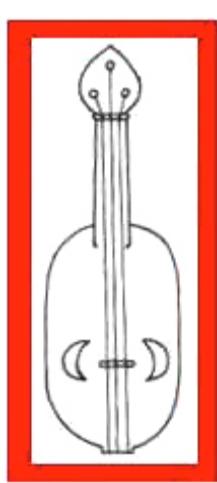


¿Y si tuviese que rebotar en tres bandas?

EL JUEGO DE LAS ISOMETRÍAS

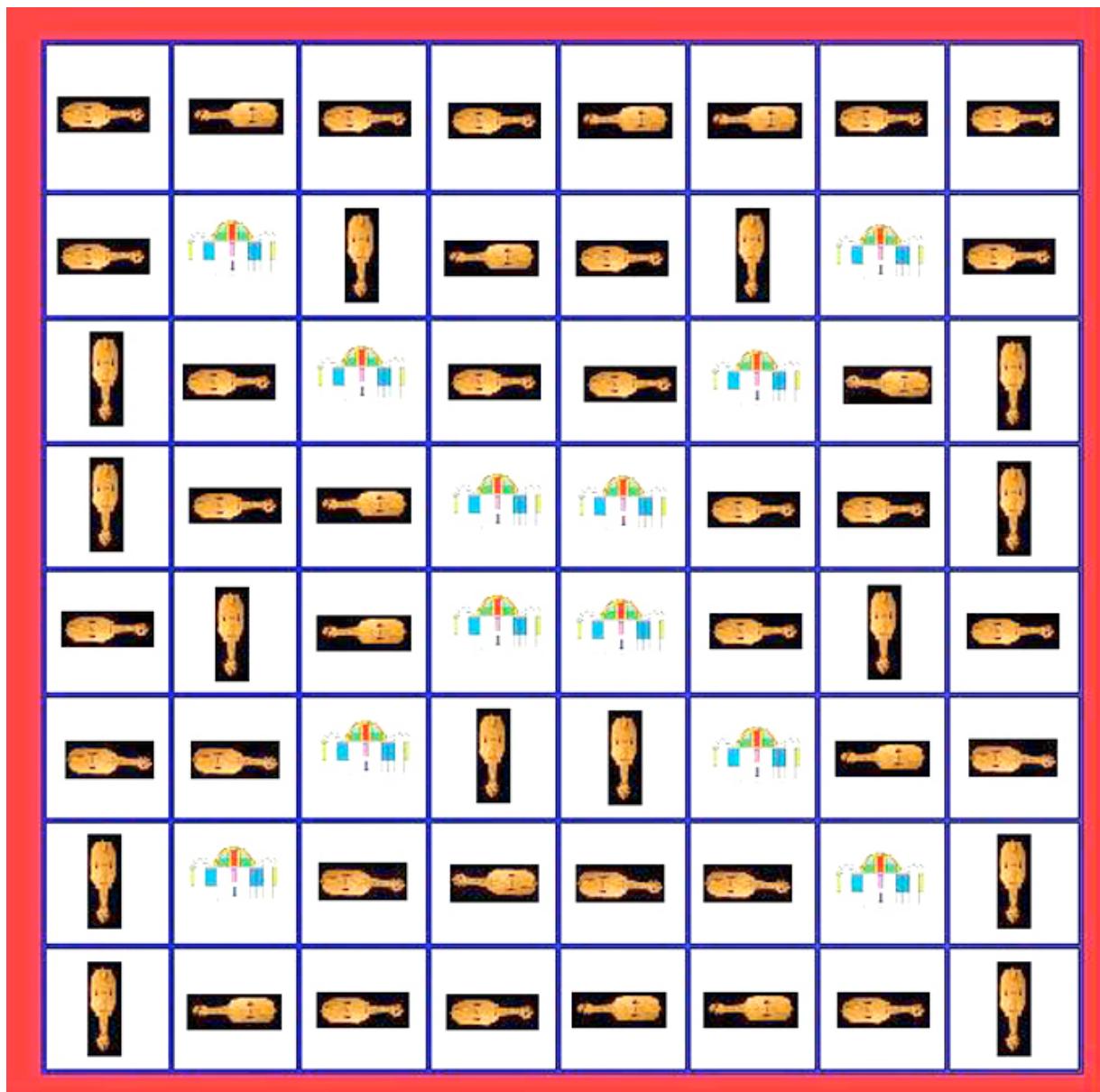
- Es un juego diseñado para consolidar los conceptos básicos de las isometrías.
- Pueden participar de dos a cuatro jugadores individuales o grupos de jugadores.

FICHAS



- Durante el juego, a cada jugador o grupo de jugadores dispondrá de cuatro fichas, de plástico o cartón, todas ellas del mismo color: azul, rojo, amarillo o verde. En la imagen (Fichas), cada pieza representa una ficha de cada uno de los posibles colores citados.
- El juego se desarrolla sobre una cartulina sobre la que se pegará una reproducción ampliada de la cuadrícula que aparece en la figura (Tablero)
- Cada jugador colocará inicialmente una de sus fichas en una de las esquinas del tablero en la misma posición que indica la correspondiente. Para el juego ha de disponerse igualmente de cartas de una baraja que, por una sola de sus caras, contendrán las mismas instrucciones que las que se reproducen en la figura (Cartas). Una vez barajadas las cartas, se colocarán boca abajo en montón.
- La dirección del vector de la traslación debe ser exclusivamente horizontal o vertical y su módulo igual al lado del cuadrado de la celda. Los giros tienen el centro en cualquiera de los vértices del cuadrado en el que se encontrara la ficha y su amplitud 90° pudiendo realizarse en cualquiera de los dos sentidos. Por su parte, la reflexión ha de realizarse sobre cualquiera de los lados de la celda donde estuviera la ficha.
- Las transformaciones sucesivas han de realizarse en el orden en que figuren en la carta que haya tomado el jugador.
- El primer jugador se sortea al azar y se continúa por la derecha.

TABLERO



- En cada turno, el jugador que corresponda cogerá la carta que está encima del montón y, después de realizar con su ficha las transformaciones que indique la carta, devolverá al montón por debajo del mismo.
- Cada jugador, en su turno, una vez realizadas correctamente todas las isometrías que indicara la carta, retirará las fichas de las transformaciones intermedias junto con la inicial. Es decir, solamente dejará sobre el tablero la última ficha colocada.
- Cada casilla puede contener una o más fichas a la vez.
- Para poder colocar cada ficha en una casilla se exige que, realizada la correspondiente transformación que indicase la tarjeta, la figura quede en la misma posición que aparece en dicha casilla.
- Hay una sola excepción a la regla general anterior y es el caso en que la ficha vaya a parar a una casilla en la que esté dibujado el Pórtico. En ese caso, el jugador puede colocarla en la posición que decida. Pero, si ya hubiese ficha de otro jugador, tendrá que coincidir en la misma posición después de la trasformación que correspondiese.
- Ganará el jugador que alcance la esquina opuesta del tablero a aquella de la que hubiese partido.

CARTAS

REFLEXIÓN TRASLACIÓN ROTACIÓN	ROTACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN	ROTACIÓN TRASLACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN
REFLEXIÓN	TRASLACIÓN REFLEXIÓN	REFLEXIÓN TRASLACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN
TRASLACIÓN	ROTACIÓN SIMETRÍA	REFLEXIÓN ROTACIÓN	REFLEXIÓN ROTACIÓN TRASLACIÓN	ROTACIÓN TRASLACIÓN REFLEXIÓN
REFLEXIÓN TRASLACIÓN ROTACIÓN	ROTACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN	ROTACIÓN TRASLACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN
REFLEXIÓN	TRASLACIÓN REFLEXIÓN	REFLEXIÓN TRASLACIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN	TRASLACIÓN ROTACIÓN REFLEXIÓN
TRASLACIÓN	ROTACIÓN SIMETRÍA	REFLEXIÓN ROTACIÓN	REFLEXIÓN ROTACIÓN TRASLACIÓN	ROTACIÓN TRASLACIÓN REFLEXIÓN